Real Space Renormalization Group Approach to the Kinetic Ising Model

高野, 宏

という性質を用いると以下のように書けることがわかる。

$$\Phi_{\mathrm{LT}}(k=0,\ t)=-2\frac{\chi_{\mathrm{LZ}}}{\chi_Z}gM\delta(t) \tag{4}$$

以上より(1)式の b に対応する項 $[\chi_{\mathrm{LZ}}-\frac{1}{gM}\chi_Z\Phi_{\mathrm{LT}}]\times D_k^{-1}$ は k に比例することになる。よって(2)式より Γ_k は長波長において k^2 に比例するという結論が得られる。この結果は２流体モデルに従って得られるものと一致する。

以上わかったことをまとめると次のようになる。σ_{L} の局所平衡への緩和時間 τ_k は $k\to 0$ で決してミクロな大きさではなく，逆に発散する。しかしそれにもかかわらず σ_{L} はスピン波を記述する変数にはなり得ない。なぜならば，スピン波を表す変数 σ_{T} の運動方程式に入ってくる σ_{L} の係数 b が k に比例し，長波長で σ_{L} と σ_{T} が運動方程式において非常に弱い結合しかもたぬようになるからである。又それによってスピン波の減衰定数 Γ_k も k^2 に比例する。

文　　　献

1) B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **188** (1969) 898.

2) D. L. Huber, Phy. Rev. **B3** (1970) 805.

3) J. Villain, Solid State Comm. **8** (1970) 31.

4) R. Shirota, K. Miyake, M. Ito and K. Yamada, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) No. 2.

Real Space Renormalization Group Approach to the Kinetic Ising Model

東大・理　高 野　　宏

実空間くりこみ群の方法は２次元のイジング的スピン系に用いられ静的臨界現象に関し良い結果を与えている。[1] 最近，この実空間くりこみ群の方法を用いて２次元キネティック・イジング模型（ＫＩＭ）の動的臨界現象を調べようという試みがいろいろ行なわれている。[2),3)]

時刻 t においてイジング・スピンの配置が $\{\sigma\}$ である確率分布を $P_t(\{\sigma\})$ とすると，ＫＩＭではこの P_t の時間発展は

$$\partial_t P_t=\Gamma P_t \tag{1}$$

という方程式に従う。時間発展演算子Γは，例えば

$$\Gamma = -\sum_{j=1}^{N} (1 - F_j) W_j(\sigma_j) \tag{2}$$

のような形をしている。ここでF_jは格子点jにあるイジング・スピンσ_jを反転させる演算子である。即ち，$F_j f(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N) = f(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N)$. $W_j(\sigma_j)$は，σ_jが反転した状態へ移る遷移確率で，detailed balance の条件

$$W_j(\sigma_j) P_{\mathrm{st}}(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N) = W_j(-\sigma_j) P_{\mathrm{st}}(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N) \tag{3}$$

を満たしていなければならないが，その他には特に$W_j(\sigma_j)$の形に制約はない。ここでP_{st}は平衡状態の分布関数である。

我々は，いろいろな量の緩和時間の臨界点近傍での異常性に興味がある。例えば，磁化$M = \sum_j \sigma_j$の緩和時間τ_{M}は

$$\tau_{\mathrm{M}} = \int_0^{\infty} dt \frac{< M(t) M(0) >}{< M(0) M(0) >} \tag{4}$$

で与えられる。ただし

$$< M(t) M(0) > = \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}} M e^{\Gamma t} P_{\mathrm{st}} M \tag{5}$$

は平衡での相関関数である。τ_{M}は臨界点T_{c}の近傍で$\tau_{\mathrm{M}} \sim |T - T_{\mathrm{c}}|^{-\Delta}$のような異常性を示し，$T_{\mathrm{c}}$で発散することが期待される。

平衡状態で，2つの時刻での条件付き確率

$$G_t(\{\sigma\} | \{\sigma'\}) = e^{\Gamma t} \delta(\{\sigma\} | \{\sigma'\}) P_{\mathrm{st}}(\{\sigma'\}) \tag{6}$$

を考える。ただし

$$\delta(\{\sigma\} | \{\sigma'\}) = \begin{cases} 1, & \{\sigma\} = \{\sigma'\} \text{ の時} \\ 0, & \{\sigma\} \neq \{\sigma'\} \text{ の時} \end{cases} \tag{7}$$

である。この$G_t(\{\sigma\} | \{\sigma'\})$の各時刻でのスピン配置$\{\sigma\}$, $\{\sigma'\}$を粗視化したものを$G'_t(\{\mu\} | \{\mu'\})$とする。ここで$\{\mu\}$，$\{\mu'\}$は粗視化したスピンの配置である。このG'_tをくりこまれた条件付き確率とみなして，このG'_tの時間発展演算子Γ'を求めることによりくりこみ変換が定義される。[2),3)] この際，固定点において時間を$t \to t' = l^{-z} t$のようにスケールして，Γがくりこまれても不変になるように（固定点で$l^z \Gamma' = \Gamma$となるように）する。ここでlは

粗視化の際の長さのスケールの変化の割合で，z はdynamical critical exponentと呼ばれている。相関距離 ξ の臨界指数 ν ($\xi \sim |T-T_c|^{-\nu}$) を用いて，前述の指数 Δ は $\Delta=\nu z$ と表わされる。

(1), (2)式のような2次元KIMに対して，高温展開は $z=2.0\pm0.05$[4]，$z=2.125\pm0.01$[5]，モンテ・カルロ法は $z=1.85\pm0.10$[6]，最近のくりこみ群とモンテ・カルロ法を組み合わせた方法では $z=2.22\pm0.13$[7] という結果を与えている。

実空間くりこみ群の方法で，上記のくりこみ変換の手続きを実行する際には2つの問題点がある。ひとつは，粗視化に伴って生じるmemory effectの扱い方であり，もうひとつは，どのような摂動展開を用いるかである。

memory effectの扱い方には次のような3つの方法が考えられるが，それぞれ困難な点がある。1番目は，G_t' の従う方程式を $\partial_t G_t' = \Gamma_t' G_t'$ の形に求める方法で，Γ_t' が時刻 t に依存する。我々は系の長時間での振舞いを知りたいので，通常 $\Gamma' = \lim_{t\to\infty} \Gamma_t'$ と近似する。しかし，KIMでは用いる摂動展開が短時間での展開となってしまい $t\to\infty$ の極限がとれない。2番目は，$G_s' = \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, G_t'$ とラプラス変換して，$sG_s' = \Gamma_s' G_s' + G_{t=0}'$ の形の方程式を求める方法で，Γ_s' が s に依存する。この場合も，系の長時間での振舞いを見る，τ_M ((4)式)のような量を見るという理由で，$\Gamma' = \lim_{s\to0} \Gamma_s'$ というMarkov近似を行なう。この方法には，Γ' に非局所的な形の項が現われるという困難がある。3番目はMazenkoらの方法[2]で，上記のような t 依存性，s 依存性が現われないように，くりこみ変換を選ぶというものである。しかし，この方法で用いる摂動展開の方法には，次に述べるような困難がある。

摂動展開に関する問題とは，静的臨界現象の場合に実空間くりこみ群の方法で通常用いるcumulant expansion（セル内の相互作用は厳密に扱い，セル間の相互作用は摂動的に扱う）は，動的臨界現象の場合には用いることができないということである[3]。これは，相互作用の扱い方が平等でないために，Γ' に含まれている情報だけでは，Γ を特徴づけるパラメターのrecursion relationをuniqueに決められないということである。

ここでは，memory effectの扱い方としては2番目の方法を用いた。摂動展開としては，Bettsら[8]によって静的臨界現象の場合に用いられた高温展開の方法を用いた。この方法は，最隣接相互作用の強さを K_1 とする時，$v_1 \equiv \tanh K_1$ に関する展開を行なうもので，すべての相互作用を平等に扱っている。三角格子で摂動の2次迄の計算で次のような結果が得られた。

memory effectにより，Γ' の中に非局所的なスピン反転の演算子の項が現われた。例えば N 個の格子点のうちの任意の2個の格子点で同時にスピンが反転するような演算子である。しかし，これらの非局所的な（最隣接等に限定されていない）項は，摂動の2次迄の計算では，

固定点のまわりでirrelevantであることが示せる。

最隣接相互作用のみの場合の臨界点は$v_{1c} \simeq 0.30$（厳密解は$v_{1c} \simeq 0.27$），臨界指数は$1/\nu \simeq 0.99$（厳密解は$1/\nu = 1$），$z \simeq 2.23$となった。これらの数値は，知られている結果と良く一致している。

さらに高次の計算は，非局所的な項をより直接的に扱わなければならないので，非常に困難である。

文　　　献

1) T. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen in *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 6, edited by C. Domb and M. S. Green, (Academic Press, London, 1976).

2) G. F. Mazenko, M. J. Nolan and O. T. Valls, Phys. Rev. **B22** (1980), 1263 and ibid. 1275 ; G. F. Mazenko, J. Hirsch, M. J. Nolan and O. T. Valls, Phys. Rev. **B23** (1981), 1431.

3) U. Deker and F. Haake, Z. Physik **B36** (1980), 379.

4) H. Yahata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **27** (1969), 1421.

5) Z. Rácz and M. F. Collins, Phys. Rev. **B13** (1976), 3074.

6) E. Stoll, K. Binder and T. Schneider, Phys. Rev. **B8** (1973), 3266.

7) J. Tobochnik, S. Sarker and R. Cordery, Phys. Rev. Lett. **46** (1981), 1417.

8) D. D. Betts, D. Cuthiell and M. Plischke, Physica **98A** (1979), 27.